

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO E RENDA DE MELÃO E MELANCIA EM FUNÇÃO DE LÂMINAS DE ÁGUA E DOSES DE NITROGÊNIO

Angel Ramon Sanchez Delgado¹; Wilson Souza Duarte¹; Valdomiro Neves Lima¹; Daniel Fonseca de Carvalho²

¹*Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, asanchez@ufrj.br.*

²*Departamento de Engenharia, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ*

1 RESUMO

Este trabalho teve como objetivo avaliar o desempenho do Método de Pontos Interiores (MPI), tipo trajetória central, na maximização de funções-objetivos associadas à produção e receita agrícola com limitações de água e nitrogênio. Para isso, foi desenvolvido um procedimento iterativo buscando maximizar a produção e renda separadamente, em função da água e do nitrogênio aplicado numa caixa bidimensional de restrições, a partir de funções de produtividade para as culturas do melão e melancia. Após caracterização e implementação do modelo matemático, foram gerados resultados numéricos para diferentes cenários agrícolas. Concluiu-se que a metodologia de pontos interiores (MPI), utilizada neste estudo, foi capaz de maximizar a produtividade e receita, resultando na obtenção de valores confiáveis quando comparada com a metodologia Simplex.

UNITERMOS: Metodologia de Pontos Interiores, programação não linear, otimização

**DELGADO, A. R. S.; DUARTE, W. S.; LIMA, V. N.; CARVALHO, D. F. de.
MATHEMATICAL MODELLING FOR OPTIMIZATION OF IN COME OF
MELON AND WATERMELON IN WATER DEPTHS AND NITROGEN RATES
DOSES FUNCTIONS**

2 ABSTRACT

The objective of this work was to evaluate the Interior Point Method (central path) in the maximization of objective functions associated to production and agricultural income with water and nitrogen constraints. Thus, a computational procedure to maximize the production in relation to water and nitrogen applied to the melon and watermelon cultivation was developed in a bi-dimensional box of constraints. The model was characterized and numerical results were presented for different agricultural scenes. It was concluded that the interior point method (IPM) used in this study was capable to maximize the productivity and revenue, obtaining reliable values when compared with Simplex method.

KEYWORDS: Interior Point Method, nonlinear programming, optimization

3 INTRODUÇÃO

A produtividade de uma cultura agrícola está condicionada a vários fatores referentes ao solo, à planta e ao clima. Dentre estes, a água e o nitrogênio são fatores essenciais e seu manejo racional é imperativo na otimização da produção agrícola. Tais recursos proporcionam maiores variações na produtividade da cultura e na qualidade do produto, em função dos seus níveis utilizados. Atualmente, a utilização racional dos recursos utilizados na agricultura é uma necessidade, de modo a garantir suas disponibilidades para uso futuro.

Existe uma relação funcional entre esses fatores e as funções de produção das culturas. O termo função de produção é usualmente conceituado como a relação existente entre o rendimento da cultura e os fatores de produção, características de cada condição ambiental (Valero & Manãs, 1993).

A resposta das culturas à irrigação pode variar em diferentes tipos de solos, clima e também em decorrência da quantidade e frequência de aplicação de água (Frizzone & Soares, 2005). A exploração ótima do ponto de vista econômico de uma cultura requer a utilização de doses adequadas destes fatores (Hexem & Heady, 1978). As funções de resposta podem ser utilizadas para se estimar o rendimento de uma cultura com a utilização de determinadas doses dos fatores de produção, bem como para estimar as doses ótimas dos fatores e o respectivo rendimento da cultura (Palacios, 1981). Servem também como um indicador para a tomada de decisão visando obter maior produção por menor custo em determinadas condições de clima, solo, irrigação, adubação, etc, fornecendo subsídios para decidir o quê e como plantar, com o máximo retorno econômico (Barros et al., 2002).

O emprego das funções de produção na análise dos resultados de experiências agrícolas é bastante difundido, sendo normalmente utilizadas modelos não lineares para a função de produção água-fertilizante-cultura. Segundo Bazaraa et al. (1979), esse procedimento caracteriza um problema de programação não linear (PPNL), em uma caixa bidimensional, com limitações dos fatores água e fertilizante. No entanto, essas funções podem ser tratadas por aproximações lineares e a sua otimização realizada com a técnica de programação separável (McMillan, 1970). Essa abordagem permite transformar um problema de programação não-linear em um de programação linear (PL), possível de ser solucionado pelo método Simplex. Conforme Frizzone & Andrade Junior (2005), essa técnica permite aproximar uma função não-linear por meio de um conjunto de segmentos de retas. De acordo com esses autores, o desenvolvimento desse tipo de programação se inicia por um equacionamento, cujo esquema permite aproximar, por partes, funções não lineares de funções lineares.

Desenvolvido por Karmarkar (1984), a metodologia de pontos interiores (MPI) tipo trajetória central, tem apresentado resultados com maior confiabilidade quando é aplicada em procedimentos que trabalham diretamente com as funções objetivos. Segundo Barboza & Oliveira (2006), uma vantagem para o uso desta metodologia está na montagem de uma estrutura matricial bem definida do problema. Experiências anteriores com o desenvolvimento de MPI específicos para uma classe de problemas e a exploração da estrutura matricial dos sistemas lineares resultantes mostram que esta abordagem é muito bem sucedida em termos da obtenção de melhor desempenho computacional.

Na busca de técnicas não convencionais da otimização agrícola que trabalhem diretamente com a função objetivo, desenvolveu-se este trabalho com o objetivo de implementar um procedimento computacional simples, baseado no método de pontos interiores, visando maximizar funções de respostas quadráticas das culturas de melão e melancia e comparar com os resultados obtidos com a otimização pelo método Simplex.

4 MATERIAL E MÉTODOS

A fim de atender o objetivo proposto, foram utilizadas funções de resposta obtidas por Barros et al. (2002) e Mousinho et al. (2003), respectivamente, para as culturas do melão (Eq. 1) e da melancia (Eq. 2).

$$p(w,n) = - 37,941 + 591,3988 w + 26,262 n - 1,32931 w^2 - 0,06276 n^2 \quad (1)$$

$$p(w,n) = 39,83497 w + 153,05098 n - 0,028721 w^2 - 0,34462 n^2 \quad (2)$$

em que

$p(w,n)$ = produtividade, em kg ha^{-1} ;

w = lâmina de água, em mm; e

n = dose de nitrogênio, em kg ha^{-1} ;

Barros et al. (2002) conduziram o experimento com melão no período de agosto a novembro de 1998 na área irrigada da fazenda experimental Vale do Curu – Pentecostes(CE), em solo de textura franco-siltosa. Utilizou-se o híbrido AF-682 do tipo amarelo, no espaçamento 1,60 m x 0,80 m. O delineamento experimental foi o de blocos casualizados com seis lâminas de irrigação (233,8; 221,4; 204,4; 183,5; 158,9 e 132,2 mm) e quatro níveis de nitrogênio (0, 75, 150 e 300 kg ha^{-1}). O sistema de aplicação de água foi o de sulcos retos e abertos em declive, com 120 m de comprimento e vazão de 0,72 L s^{-1} , sendo o controle das irrigações realizado por meio de tensiometria. A aplicação do nitrogênio foi feita 20% no plantio e 80% fracionados em 4 adubações de cobertura, com frequência de 10 dias após plantio.

Mousinho et al. (2003) conduziram o experimento com melancia no período de setembro a dezembro de 2001, na área experimental do Laboratório de Hidráulica e Irrigação da Universidade Federal do Ceará, em Fortaleza-CE, em solo classificado como Luvisolo. A melancia, variedade Crimson Sweet, foi transplantada na área experimental com um espaçamento de 2,5 m x 1,2 m. O delineamento experimental foi o de blocos casualizados com quatro níveis de irrigação, correspondendo a 0,35; 0,70; 1,0 e 2,0 vezes a evapotranspiração máxima da cultura, estimada com base na evapotranspiração de referência obtida por Penman-Monteith-FAO, e quatro doses de nitrogênio (0, 75, 150 e 300 kg ha^{-1}). De acordo com os autores, as lâminas de irrigação variaram de 100 a 900 mm, sendo as mesmas aplicadas diariamente por meio de um sistema de irrigação localizado tipo gotejamento, com gotejadores autocompensantes de vazão igual a 4,0 L h^{-1} , espaçados de 0,5 m. A aplicação da adubação nitrogenada (uréia e sulfato de amônio) variou de acordo com os tratamentos, sendo 20% feita em fundação e o restante em 4 doses iguais aos 10, 20, 30 e 40 dias após transplantio.

Utilizando as equações 1 e 2, foi implementada a metodologia de pontos interiores (MPI), em ambiente Matlab® 6.5 (Mathworks, 2002), no sentido de maximizar a produtividade de cada cultura sujeitas à variação de lâmina d'água (w) e dose de nitrogênio (n). Dessa forma, buscou-se:

Maximizar $p(w,n)$, sujeito a:

$$w_i \leq w \leq w_s$$

$$n_i \leq n \leq n_s$$

em que:

w_i = lâmina d'água mínima, em mm;

w_s = lâmina d'água máxima, em mm;

n_i = dose mínima, em kg ha^{-1} ; e

n_s = dose máxima, em kg ha^{-1} .

Para a cultura da melancia, além da maximização da produtividade, foi também implementado um problema de maximização da receita, cuja função objetivo foi:

$$\text{Maximizar } R(w,n) = p_c p(w,n) - c_w w - c_n n, \text{ sujeito a:} \quad (3)$$

$$w_i \leq w \leq w_s$$

$$n_i \leq n \leq n_s$$

em que:

$R(w,n)$ = receita obtida do plantio, em $\text{R\$ ha}^{-1}$;

p_c = preço da cultura, em $\text{R\$ kg}^{-1}$;

c_w = custo da água, em $\text{R\$ mm}^{-1}$; e

c_n = custo do nitrogênio, em $\text{R\$ kg}^{-1}$.

A técnica de pontos interiores (MPI) foi desenvolvida fixando um parâmetro $\mu > 0$ e incorporando as restrições que definem a caixa bidimensional na função objetivo por meio de uma função denominada de “barreira logarítmica”. Assim, resolveu-se o PPNL acima buscando:

$$\text{Maximizar } \varphi_\mu(w,n) \quad (4)$$

em que:

$$\varphi_\mu(w,n) = p(w,n) + \mu B(w,n) \text{ e}$$

$$B(w,n) = \log(w_s - w) + \log(w - w_i) + \log(n_s - n) + \log(n - n_i)$$

Em seguida, o parâmetro μ é diminuído e o processo repetido até que um critério de parada seja alcançado. A metodologia detalhada deste procedimento é apresentada por Carvalho et al. (2009).

Visando comparar os resultados obtidos na otimização utilizando essa metodologia com resultados obtidos pelo método Simplex, foram adotados os mesmos níveis das variáveis w (lâmina) e n (dose) utilizados por Barros et al. (2002) e Mousinho et al. (2003). Para a cultura do melão foram considerados os níveis de w variando de 150 (w_i) a 240 mm (w_s) e, para a cultura da melancia, de 100 (w_i) a 900 mm (w_s). Para ambas as culturas, os níveis de n variaram de 0 (n_i) a 300 kg ha^{-1} (n_s). Portanto, para ser possível a comparação dentre as diferentes metodologias de otimização, foram utilizados os mesmos níveis dos fatores “ w ” e “ n ”.

Como citado anteriormente, para a cultura da melancia ainda foi realizada a maximização da receita sendo, para isso, empregados os mesmos valores de preço do produto e custo de insumos adotados por Mousinho et al. (2003). O preço adotado para melancia foi de $\text{R\$ } 0,28 \text{ kg}^{-1}$ e os custos para água e nitrogênio foram, respectivamente, de $\text{R\$ } 0,3884 \text{ mm}^{-1}$ e $\text{R\$ } 1,15 \text{ kg}^{-1}$. A maximização da receita para a cultura do melão não foi implementada pelo fato dos autores não apresentarem informações de preço do produto e custo dos insumos.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados da maximização da produtividade e renda obtidos separadamente, para a cultura da melancia estão apresentados nas Figuras 1 a 4. A produtividade máxima obtida pelo MPI, tipo trajetória central, foi de $30.799,65 \text{ kg ha}^{-1}$, com lâmina de água igual a $678,84$

mm e dose de nitrogênio igual a $221,44 \text{ kg ha}^{-1}$. A renda máxima foi de R\$ $3.875,98 \text{ ha}^{-1}$, com lâmina de água de $631,07 \text{ mm}$ e dose de nitrogênio de $214,39 \text{ kg ha}^{-1}$. Os resultados apresentados por Mousinho et al. (2003) mostram valores de produtividade máxima igual a $30.806 \text{ kg ha}^{-1}$, associados a um volume de água de $693,5 \text{ mm}$ e $222,1 \text{ kg ha}^{-1}$ de nitrogênio, sendo a renda de R\$ $3.812,53 \text{ ha}^{-1}$, para $669,4 \text{ mm}$ de água e $216,1 \text{ kg ha}^{-1}$ de nitrogênio. Comparando os resultados, é possível notar que os valores de máxima produtividade foram diferentes. Apesar de apresentar valores máximos de produtividade e de volume de água e nitrogênio menores que os obtidos pelo método Simplex (Mousinho et al., 2003), é possível constatar que, utilizando a técnica do MPI, a renda líquida otimizada é maior, utilizando-se menos água e nitrogênio.

Na Figura 1 pode-se observar um pequeno esboço da trajetória central gerada pelos pontos do plano próximos dos pontos $(w(\mu), n(\mu))$ que resolvem aproximadamente a equação 4, para cada $\mu > 0$ fixo, no caso das curvas de isoprodutos de $p(w,n)$. Na Figura 2, são apresentados os pontos do espaço próximos dos pontos da trajetória central $(w(\mu), n(\mu), p(w(\mu), n(\mu)))$ (para cada $\mu > 0$ fixo), no caso do gráfico da função $p(w,n)$.

A vantagem de utilizar uma metodologia que segue iterativamente à trajetória central é que ela permite visualizar a convergência para a solução ótima da produtividade, quando μ decresce até uma tolerância predeterminada. Mais ainda, a cada iteração é dada ciência do progresso das soluções aproximadas geradas e da região onde se encontram valores ótimos dos problemas de produção e receita.

Neste estudo, a seqüência de pontos gerada pelo MPI converge para a solução ótima dada por $(w^*, n^*, p(w^*, n^*)) = (678,84; 221,44; 30.799,65)$ (Figura 2). Além disso, o parâmetro de penalidade μ permite conhecer, para um pequeno número de iterações, a partir de que valor não é possível melhorar o valor da função objetivo. Isso faz com que se possa aplicar o procedimento implementado parcialmente, alcançando assim um bom desempenho computacional.

De modo análogo, nas Figuras 3 e 4 são apresentadas as trajetórias centrais associadas às curvas de contorno e gráfico da receita $R(w,n)$, respectivamente. Neste caso, pode-se notar que a seqüência de pontos converge para $(w^*, n^*, R(w^*, n^*)) = (631,07; 214,39; 3.875,98)$.

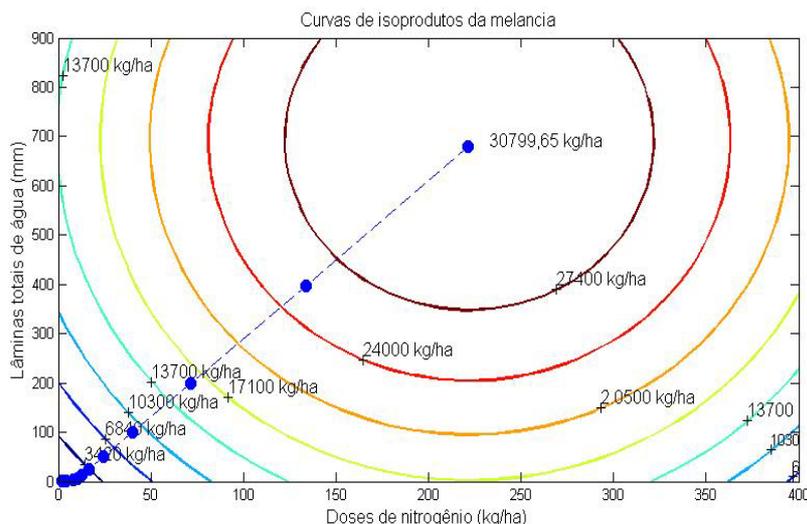


Figura 1. Curvas de isoprodutos da função $p(w,n)$ e trajetória central associada à produtividade da melancia.

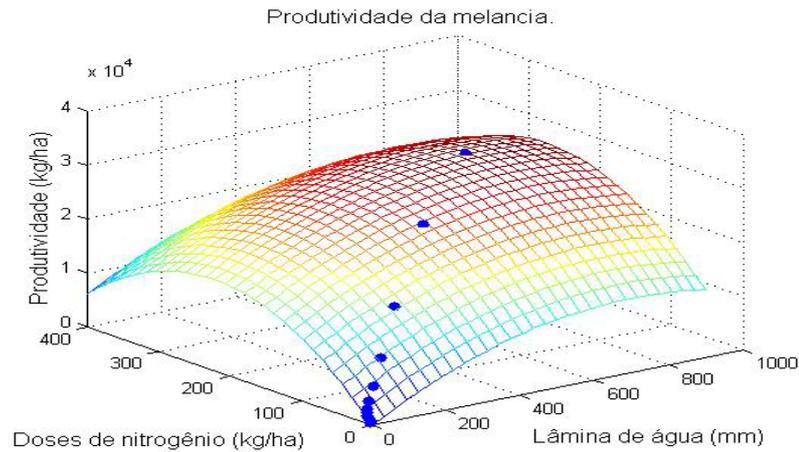


Figura 2. Superfície de resposta da função de produtividade $p(w,n)$ e trajetória central associada à produtividade da melancia.

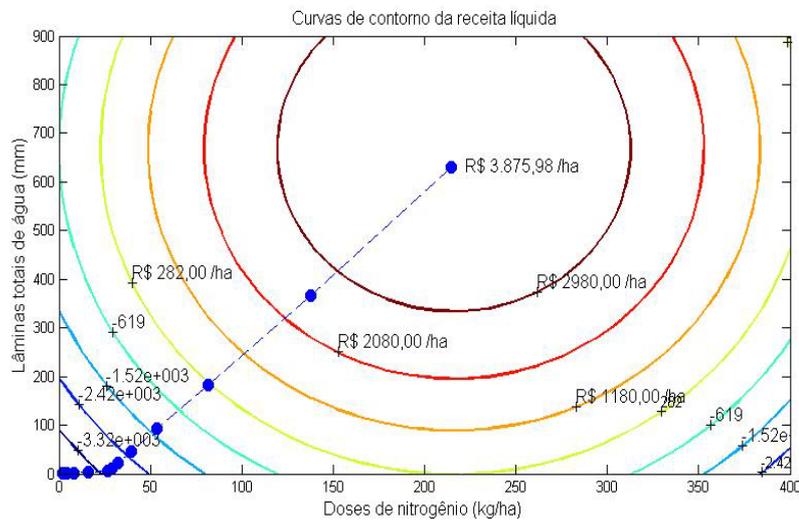


Figura 3. Curvas de contorno da função da renda $R(w,n)$ e trajetória central associada à renda da melancia.

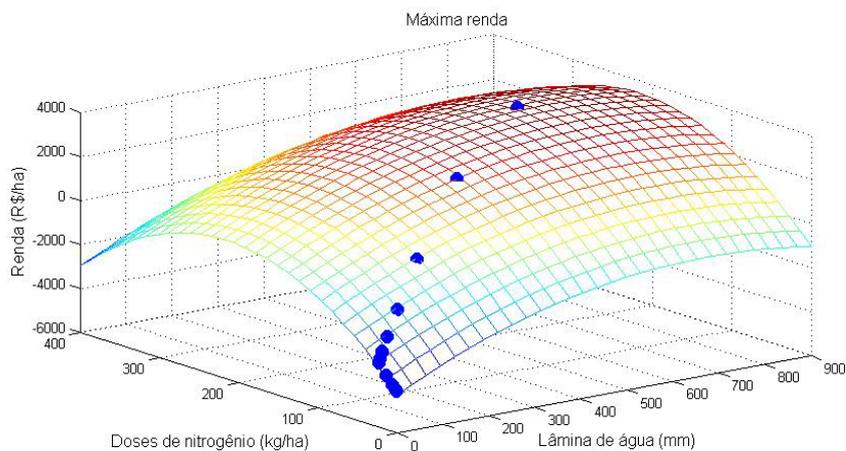


Figura 4. Superfície de resposta da função da renda $R(w,n)$ e trajetória central associada à renda da melancia.

A máxima produtividade obtida pelo MPI tipo trajetória central para a cultura do melão foi de $30.583,86 \text{ kg ha}^{-1}$, com uma lâmina de água igual a $222,16 \text{ mm}$ e dose de nitrogênio igual a $208,00 \text{ kg ha}^{-1}$. Os resultados apresentados por Barros et al. (2002), utilizando a metodologia Simplex, apresentam valores de produtividade máxima igual a $30.574 \text{ kg ha}^{-1}$, associados a uma lâmina de água de $222,40 \text{ mm}$ e $209,20 \text{ kg ha}^{-1}$ de nitrogênio. Comparando os resultados obtidos por ambas as metodologias, é possível observar que os valores de máxima produtividade obtidos foram diferentes, sendo maior o valor obtido pelo MPI (tipo trajetória central), utilizando menos água e nitrogênio.

Da mesma forma, as Figuras 5 e 6 mostram a trajetória central gerada pelas soluções ótimas aproximadas a partir da otimização da equação 4, pela aplicação do MPI. Note que a seqüência de pontos converge para a solução ótima dada por $(w^*, n^*, p(w^*, n^*)) = (222,16; 208,00; 30.583,86)$ (Figuras 5 e 6).

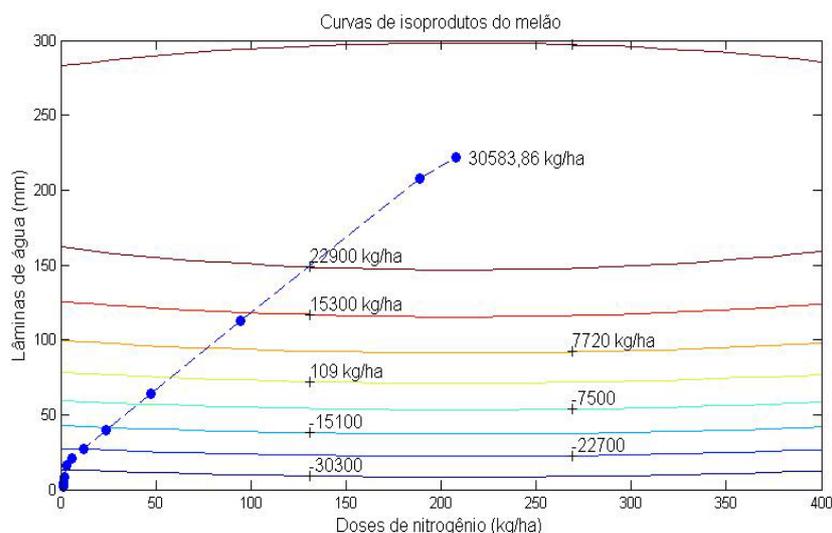


Figura 5. Curvas de isoprodutos da função $p(w,n)$ e trajetória central associada à produtividade do melão.

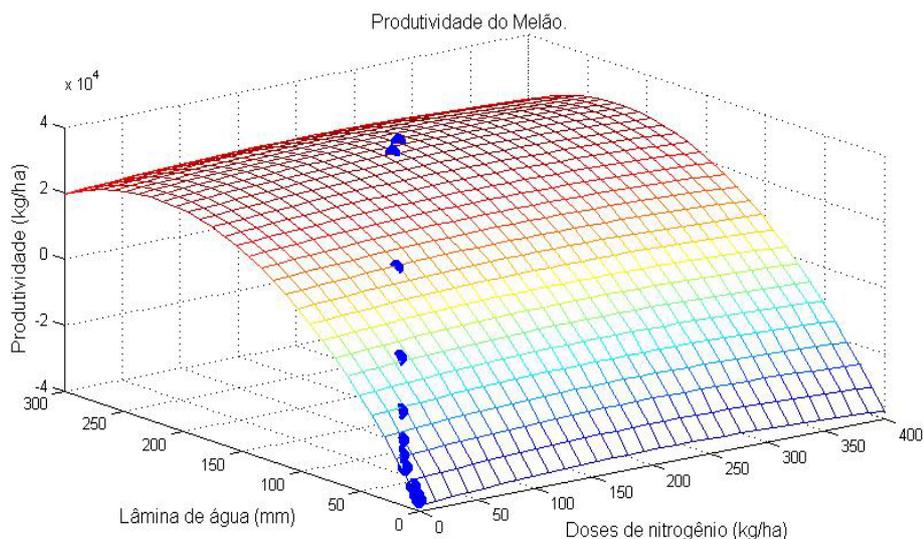


Figura 6. Superfície de resposta da função de produtividade $p(w,n)$ e trajetória central associada à produtividade do melão.

Carvalho et al. (2009) utilizando o método dos pontos interiores na otimização de funções de resposta para as culturas aveia e laranja-pera, obtiveram resultados semelhantes aos obtidos utilizando a metodologia Simplex. No entanto, os autores afirmam que na técnica de linearização por partes (Simplex), o número de seguimentos em que a função-objetivo é linearizada influencia no resultado da otimização, fazendo com que a solução do problema fique aproximada. Dessa forma, para a obtenção de melhores resultados é necessário aumentar o número de segmentos da função, o que implica no aumento acentuado do custo computacional. Ao contrário, utilizando a técnica do MPI, a otimização é realizada com a função original (sem o processo de linearização) e com um menor custo operacional, em virtude de um menor número de iterações.

6 CONCLUSÕES

Comparando os resultados obtidos pelo método de pontos interiores com aqueles obtidos pelo Simplex, foi possível concluir que a metodologia apresentada constitui uma alternativa confiável para a resolução dos problemas de maximização da produção e renda em cenários hidroagrícolas, enfatizando a estrutura da barreira logarítmica como poderosa base de trabalho na análise dos problemas estudados.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOZA, C. B.; OLIVEIRA, A. R. L. Planejamento do tratamento por radioterapia através de métodos de pontos interiores. **Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro, v. 26, n. 1, p. 1-24, 2006.

BARROS, V. et al. Função de produção da cultura do melão para níveis de água e adubação nitrogenada no Vale do Curu-CE. **Irriga**, Botucatu, v. 7, n. 2, p. 98-105, 2002.

BAZARAA, M. C. et al. **Nonlinear programming: theory and algorithms**, New York: John Wiley and Sons, 1979. 638 p.

CARVALHO, D. F.; SANCHEZ DELGADO, A.R.; OLIVEIRA, R.F.; SILVA, W.A.; FORTE, V.L. Maximização da produção e da receita agrícola com limitações de água e nitrogênio utilizando método de pontos interiores. **Engenharia Agrícola**, Jaboticabal, v. 29, n. 2, p. 321-327, 2009.

FRIZZONE J. A. & ANDRADE JUNIOR, A.S. **Planejamento de irrigação: análise de decisão de investimentos**. Brasília: EIT, 2005, 627 p.

GONZAGA, C. C. Path following methods for linear programming. **SIAM Review**, Ann Arbor, v. 34, n. 2, p. 167-224. 1992.

HEXEM, R. W. & HEADY, E. O. **Water production functions for irrigated agriculture**. Ames, Iowa: Iowa University Press, 1978. 215 p.

KARMAKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. **Combinatorica**, Berlin, v. 4, p. 373-395, 1984.

MATHWORKS. Matlab Release 13. Natick, MA: MathWorks Inc., 2002. Disponível em: <http://www.mathworks.com>. Acessado em Set. 2004.

MCMILLAN, C., Jr. **Mathematical programming: an introduction to the design and application of optimal decision machines**. New York: John Wiley, 1970. 495p.

MOUSINHO F. E. P. et al. Função de resposta da melancia à aplicação de água e nitrogênio para as condições Edafoclimáticas de Fortaleza, CE. **Irriga**, Botucatu, v. 8, n. 3, p. 264-272, 2003.

PALACIOS, E. V. Response functions of crop yield to soil moisture stress. **Water Resources Bulletin**, Minneapolis, v. 17, n. 4, p. 699-703, 1981.

VALERO, J. A. de J.; MANÃS, F. J. M. de S. **Agronomia del riego**. Madrid: Mundi, 1993. 732 p.